文章编号:1009-6825(2002)06-0042-02

缓和曲线坐标计算的精度分析

栗振锋,景宏君

摘 要:对文献中所建的缓和曲线中线方程进行了数学分析。在进行公式推导时,指出了其坐标计算的截断存在误差,进而对误差原因作了分析,找出了控制误差的方法及应用条件。该方法适合于传统的坐标计算思路,对设计施工等尤为适宜。

关键词:缓和曲线,坐标,误差分析,控制方法

中图分类号:TU198 **文献标识码**:A

1 缓和曲线的中线数学方程式

综合文献[1]中所给的直线、圆曲线、缓和曲线中线数学方程式,可得出三种线单元的表达式:

$$X(s) = X_0 + \int_0^s \cos\phi(s)\,ds, \tag{1}$$

$$Y(s) = Y_0 + \int_0^s \sin\phi(s)\,ds。 \tag{2}$$

式中:X_0、Y_0——线单元起点的坐标;

S——该点到起点的距离;

$\phi(S)$——该点的切线方位角。

而对于缓和曲线,其中线方程式可表达为:

$$X(s) = X_0 + \int_0^s \cos[\phi_0 + m \times \frac{s}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}]ds \tag{3}$$

$$Y(s) = Y_0 + \int_0^s \sin[\phi_0 + m \times \frac{s}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}]ds \tag{4}$$

$$\phi(s) = \phi_0 + m \times \frac{s}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}。 \tag{5}$$

式中:r_b 系指回旋线起点半径,r_e 系指回旋线终点半径。$\phi(0)$ 为线单元起点的方位角。$m = \{1, -1\}$,表示回旋线逆时针转,$m = 1$;顺时针,$m = -1$。$p = \{1, -1\}$:当 $r_b > r_e$ 时,回旋线逆时针转,$p = 1$,回旋线顺时针转,$p = -1$;当 $r_b < r_e$ 时,回旋线逆时针转,$p = -1$,回旋线顺时针转,$p = 1$。α 表示缓和曲线参数。

2 缓和曲线中线坐标计算的误差控制

2.1 公式推导

方程式(3)中

$$\cos[\phi_0 + m \times \frac{s}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}]$$

$$= \cos[p(\frac{s}{\sqrt{2}\alpha} + \frac{p \times m \times \alpha}{\sqrt{2}r_b})^2 + (\phi_0 - \frac{p \times \alpha^2}{2r_b^2})]$$

$$= \cos[p(\frac{S}{\sqrt{2}\alpha} + \frac{p \times m \times \alpha}{\sqrt{2}r_b})^2] \times \cos(\phi_0 - \frac{p \times \alpha^2}{2r_b^2}) - \sin[p(\frac{s}{\sqrt{2}\alpha} + \frac{p \times m \times \alpha}{\sqrt{2}r_b})^2] \times \sin(\phi_0 - \frac{p \times \alpha^2}{2r_b^2})。$$

为了推导方便,令

$$c = \frac{s}{\sqrt{2}\alpha} + \frac{p \times m \times \alpha}{\sqrt{2}r_b},\ d = \frac{p \times m \times \alpha}{\sqrt{2}r_b},$$

$$e = \phi_0 - \frac{p \times \alpha^2}{2r_b^2}。$$

$$\int_0^s \cos[pc^2]ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!}。 \tag{6}$$

$$\int_0^s \sin[pc^2]ds = p\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{4n+3} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+3)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+3} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+3)(2n+1)!}\right]。 \tag{7}$$

同理可求得:$\sin\left[\phi_0 + m \times \frac{s}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}\right] = \sin[pc^2] \times \cos e + \cos[pc^2] \times \sin e$,

由此可得:$\int_0^s \cos\left[\phi_0 + m \times \frac{s}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}\right]ds$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!}\right] \times \cos e$$
$$- \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{4n+3} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+3)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+3} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+3)(2n+1)!}\right] \times p \times \sin e, \tag{8}$$

$$\int_0^s \sin\left[\phi_0 + m \times \frac{S}{r_b} + p \times \frac{s^2}{2\alpha^2}\right]ds$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{4n+3} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+3)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+3} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+3)(2n+1)!}\right] \times p \times \cos e$$
$$+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!}\right] \times \sin e。 \tag{9}$$

2.2 误差分析

对于 c、d 的表达式,若 $r_b > r_e$,则 $p \times m = 1$;若 $r_b < r_e$,则 $p \times m = -1$。两种情况在 $\alpha \leqslant r$[2] 条件下,可证得 $|c| \leqslant 1$,$|d| \leqslant 1$。取 $r = min\{r_b, r_e\}$,可进一步证得,$\alpha \leqslant \sqrt{2}r$ 时,$|c| \leqslant 1$,$|d| \leqslant 1$ 也成立。

这里,只对(8)、(9)中无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!}$ 作一分析,其它类推。

对于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!}$ 来说:

1)对于某一确定桩号来讲,c 值为常量,所以无论 c 的正负,该无穷级数都为交错级数;

2)由于在 $\alpha \leqslant \sqrt{2}r$ 条件下,$|c| \leqslant 1$,可较容易证得:

$$\frac{|c|^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!} \geqslant \frac{|c|^{4(n+1)+1} \times \sqrt{2}\alpha}{[4(n+1)+1][2(n+1)]!}(n = 0,1,2\cdots\cdots);$$

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{|c|^{4n+1} \times \sqrt{2}\alpha}{(4n+1)(2n)!} = 0$。

收稿日期:2002-03-20

作者简介:栗振锋(1968-),男,1991 年毕业于同济大学道桥专业,讲师,山西省交通职业技术学院,山西 太原 030031

景宏君(1974-),男,长安大学公路学院铁道工程专业在读博士生,陕西 西安 710064